

Пономарева Виктория Вячеславовна

Выпускная квалификационная работа

**ДЕФОРМАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ
НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Основная образовательная программа СВ.5008.2017 «Механика и математическое
моделирование»

Профиль «Механика деформируемого твердого тела»

Допущена к защите

Заведующий кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор С. Б. Филиппов

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Бауэр

Рецензент:

к. ф.-м. н., доцент Е. Б. Воронкова

Saint-Petersburg State University
Theoretical and Applied Mechanics

Ponomareva Viktoria Vyacheslavovna

Graduation Project

DEFORMATION OF NONUNIFORM CIRCULAR PLATES UNDER NORMAL
PRESSURE

Admitted for defence

Head of Department:

Professor S. B. Filippov

Scientific Supervisor:

Professor S. M. Bauer

Reviewer:

Associate Professor E. B. Voronkova

Saint-Petersburg

2021

Оглавление

Введение	4
Постановка задачи	5
Теория Амбарцумяна	6
Анализ результатов расчета в пакете Mathematica	10
Расчет с помощью COMSOL Multiphysics	13
Заключение	15
Список литературы	16

Введение

В последние годы ученых все больше интересует изучение деформации решетчатой пластины (РП) склеры. Это связано с тем, что деформация решетчатой пластины является ключевым фактором в возникновении глаукомы - заболевания, возникающего из-за повышенного внутриглазного давления (ВГД) и приводящего к атрофии зрительного нерва и, как следствие, потере остроты зрения. [1–3]

Согласно результатам исследований, повышенное ВГД приводит к механическому сдвигу и прогибу РП, что вызывает деформацию канальцев в решетчатой пластине и ущемление проходящих в ней нервных волокон, что приводит к потере зрительных функций. [1]

В связи с этим интерес представляет построение математических моделей, описывающих поведение РП при изменении ВГД.

Основной проблемой в аналитическом исследовании деформации решетчатой пластины является отсутствие точных данных о ее механических характеристиках, но благодаря экспериментальным исследованиям получены данные, которые позволяют оценить толщину, модуль упругости и размеры РП. Согласно имеющимся исследованиям, значения прогиба пластины, которые получены при рассмотрении составной оболочки и, отдельно, жестко закрепленной пластины отличаются меньше чем на 1%. Таким образом, деформацию РП можно исследовать отдельно от деформации склеральной оболочки, что облегчает учет особенностей РП - ее анизотропию и неоднородность.[1] Неоднородность решетчатой пластины проявляется в нескольких аспектах: у нее неоднородный модуль упругости из-за неравномерного распределения пор в пластине, и также неоднородная толщина. Целью данной работы является исследование деформации пластины с неоднородной толщиной.

Постановка задачи

Рассматривается трансверсально изотропная круглая пластина радиуса R с заданным законом изменения толщины $h(r)$ жестко закрепленная по краю.

За координатную плоскость принята срединная поверхность пластины: r, θ , - полярные координаты, z - расстояние по нормали до срединной поверхности.

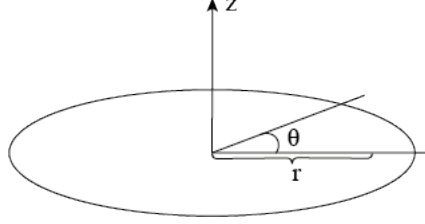


Рис. 1

Нижняя и верхняя поверхности пластины нагружены равномерно распределяемыми давлениями p^- и p^+

$$\sigma_z = -p^+ \text{ при } z = h/2$$

$$\sigma_z = -p^- \text{ при } z = -h/2 \quad (1)$$

$$\tau_{rz} = 0 \text{ при } z = \pm h/2$$

В данной работе рассматривается осесимметричная задача деформирования пластины, поэтому все искомые функции зависят только от координат r и z .

Далее будут использоваться обозначения:

E_1, E_2 - модули Юнга для направлений в плоскости пластины и перпендикулярных к ней соответственно, ν - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, ν' - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном этой плоскости, а ν'' - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, при растяжении в плоскости изотропии, G, G' - модули сдвига для плоскости изотропии и плоскостей, нормальных к плоскости изотропии соответственно.

Теория Амбарцумяна

Рассмотрим задачу о прогибе круглой пластинки под действием нормального давления в рамках общей линейной теории С.А.Амбарцумяна. В основу этой уточненной теории положены следующие гипотезы [4]:

1. Нормальное к срединной поверхности перемещение не изменяется по толщине;
2. Касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной поверхности пластины, изменяются по квадратичному закону.

Принимая эти гипотезы, по сути, полагаем:

$$e_z = 0; \quad \tau_{rz} = \frac{\varphi(r)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{\theta z} = \frac{\psi(r)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad (2)$$

где τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ - касательные напряжения, e_z - деформация по толщине пластины, а $\varphi(r)$, $\psi(r)$ - произвольные искомые функции координаты r .

Закон Гука для трансверсально-изотропного тела имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\nu}{E_1} \sigma_\theta - \frac{\nu'}{E_2} \sigma_z, & e_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G'}, \\ e_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_1} - \frac{\nu}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu'}{E_2} \sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{\tau_{\theta z}}{G'}, \\ e_z &= \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu''}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu''}{E_1} \sigma_\theta, & e_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}, \\ \nu'' E_2 &= \nu' E_1, & G &= \frac{E_1}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Составляющие деформации $e_r, e_\theta, e_z, e_{rz}, e_{\theta z}, e_{r\theta}$ связаны с функциями перемещений u_r, u_θ, u_z соотношениями [4]:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ e_\theta &= \frac{u_r}{r}, & e_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & e_{r\theta} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_r(r, \theta, 0) = u(r), \quad u_\theta(r, \theta, 0) = v(r), \quad u_z(r, \theta, z) = w(r)$$

Напряженное состояние в цилиндрической системе координат описывается тензором напряжений, компонентами которого, на площадках, нормальных к координатным направлениям r, θ, z , являются: $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$; $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$; $\sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$, соответственно. При чем

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}, \tau_{zr} = \tau_{rz}, \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}. [4]$$

Тогда уравнения равновесия для напряжений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Ввиду предположения (2) из (4), учитывая (3), для перемещений получаем:

$$\begin{aligned} u_z &= w(r), \\ u_r &= u - z \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{\phi(r, \theta)}{G'}, \\ u_\theta &= v - z \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{\psi(r, \theta)}{G'}. \end{aligned} \quad (6)$$

На основании (4) с помощью (6) определяем деформации $e_r, e_\theta, e_{r\theta}$:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{z}{G'} \frac{h}{4} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{1}{G'} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{1}{(G')^2} \frac{\partial G'}{\partial r} \right) \\ e_\theta &= \frac{1}{r} \left(u - z \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{\varphi}{G'} \right) \\ e_{r\theta} &= -\frac{z}{2r} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{\psi}{G'} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{1}{G'} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{G'^2} \frac{\partial G'}{\partial r} \right) + \frac{z\psi h}{4G'} \frac{\partial h}{\partial r} \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в обобщенный закон Гука (3) получаем выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{B} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{z}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{G'} \frac{\partial G'}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z\varphi h}{4G'} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\nu''(1+\nu)}{E_1} \left(Z_1 + \frac{Pz}{h} \left(\frac{3}{2} - \frac{2z^2}{h^2} \right) \right) \right) \\ \frac{\sigma_\theta}{B} &= \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} - z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{z}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{G'} \frac{\partial G'}{\partial r} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{z\varphi h}{4G'} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\nu''(1+\nu)}{E_1} \left(Z_1 + \frac{Pz}{h} \left(\frac{3}{2} - \frac{2z^2}{h^2} \right) \right) \right) \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G} &= \frac{z}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{G'} \frac{\partial G'}{\partial r} \right) + \frac{z\psi h}{4G'} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \sigma_z &= Z_1 - \frac{z}{2} \left(\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \right) + \varphi \frac{h}{2} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$Z_1 = \frac{-p^+ - p^-}{2}, P = -p^+ + p^-, B = \frac{E_1}{1 - \nu^2}$$

Последние члены первых двух формул (8) появляются из-за напряжения σ_z , которое определяется из третьего уравнения равновесия (5) и условий на поверхности (1).

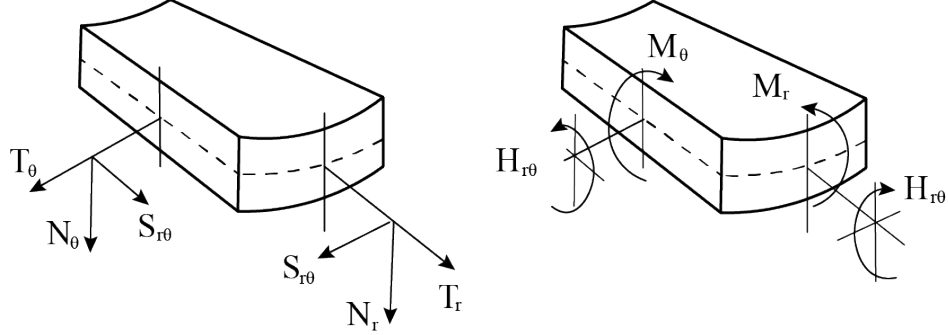


Рис. 2. Напряжения. Внутренние усилия и моменты.

Данным напряжениям эквивалентны внутренние силы и моменты:

$$\begin{aligned}
 \frac{T_r}{Bh} &= \frac{\nu}{r}u + \frac{(1+\nu)\nu'}{2E_2}Z_1; \\
 \frac{T_\theta}{Bh} &= \frac{u}{r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(1+\nu)\nu'}{2E_2}Z_1; \\
 S_{\theta r} &= 0; \\
 \frac{M_r}{D} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{6(1+\nu)\nu'}{5E_2h}P + \frac{h^2}{10G'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{G'}\frac{\partial G'}{\partial r}\varphi + \nu\frac{\varphi}{r}\right) + \frac{\varphi h}{4G'}\frac{\partial h}{\partial r}; \\
 \frac{M_\theta}{D} &= -\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{6(1+\nu)\nu'}{5E_2h}P + \frac{h^2}{10G'}\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\nu\varphi}{G'}\frac{\partial G'}{\partial r}\right) + \nu\frac{\varphi h}{4G'}\frac{\partial h}{\partial r}; \\
 \frac{H_{r\theta}}{D_k} &= \frac{h^2}{10G'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} - \frac{\psi}{G'}\frac{\partial G'}{\partial r}\right) + \frac{3h\psi}{4G'}\frac{\partial h}{\partial r}; \\
 N_r &= \frac{h^3}{12}\varphi; \\
 N_\theta &= \frac{h^3}{12}\psi;
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)}, D_k = \frac{h^3 G}{12}$$

Уравнения равновесия для сил и моментов с учетом того, что нагрузка имеет только нормальную компоненту - давление p , записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{T_r - T_\theta}{r} &= 0, \\
\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r}{r} &= -P, \\
\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r, \\
\frac{H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2}{r} H_{\theta r} &= N_\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив выражения для внутренних усилий и моментов в уравнения равновесия получим систему дифференциальных уравнений, из которых определим прогиб:

$$\begin{aligned}
&\frac{h^2 \varphi}{4} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{h^3 \varphi}{12r} = -P, \\
&-D \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(-\frac{\partial D}{\partial r} - \frac{D}{r} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{-\partial D}{\partial r} \frac{\nu}{r} + \frac{D}{r^2} \right) + \\
&+ \frac{\partial D}{\partial r} \left[\frac{6(1+\nu)\nu'}{5E_2 h} P + \frac{h^2}{10G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{\varphi h}{G'} \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \\
&+ D \left[-\frac{6(1+\nu)\nu' P}{5E_2 h^2} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{2h}{10G'} \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{h^2}{10G'} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\nu \varphi}{r^2} \right) + \frac{1}{G'} \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} h + \frac{\partial h}{\partial r} \varphi \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{h^2}{10G' r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \nu \right) + \frac{\varphi h}{G' r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h^2}{10G' r} \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\nu \varphi h}{r G'} \frac{\partial h}{\partial r} \right] - \frac{h^3}{12} \varphi = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Полагаем, что на внешнем крае выполнены следующие граничные условия:

$$r = R : w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{3P}{4G'h} \tag{12}$$

Отсюда получаем решение первого уравнения:

$$\varphi(r) = -\frac{6Pr}{h^3}$$

Решение второго дифференциального уравнения для определение прогиба w , производится с помощью математического пакета Mathematica.

Анализ результатов расчета в пакете Mathematica

Будем сравнивать пластины одинаковой массы с радиусом $R = 1$ мм, и так как плотность считаем однородной, то рассматриваем пластины одинакового объема. За единичный объем берется пластина с постоянной толщиной $h = 0.1$ мм, а выражения толщины других пластин умножаются на некоторый коэффициент так, чтобы получились пластины с равным объемом $V = 0.1\pi$ мм³.

При чем параметры пластин: $E_1 = 1.43 \cdot 10^6$ Па, $E_2 = \frac{1.43}{50} \cdot 10^6$ Па, $\nu = 0.45$, $\nu' = 0.45$, $G = 0.5 \cdot 10^6$ Па, $G' = 0.5 \cdot 10^6$ Па, $P = -15 \cdot 133.32$ Па, $R = 1$ мм.

В общем виде толщина пластины выглядит следующим образом: $h = k * f(r) + c$, где k и c измеряются в миллиметрах, а $f(r)$ - безразмерная величина ($f(r) = r$ или $f(r) = r^2$). Толщина h также измеряется в миллиметрах.

Рассмотрим пластины с линейным законом изменения толщины $h = 1.2 \cdot 0.05(r + 1)$ и $h = 1.5(0.1 - 0.05r)$ и сравним их прогиб с пластиной $h = 0.1$



Рис. 3. Форма пластины а) $h = 1.2 \cdot 0.05(r + 1)$, б) $h = 1.5(1 - 0.05r)$.

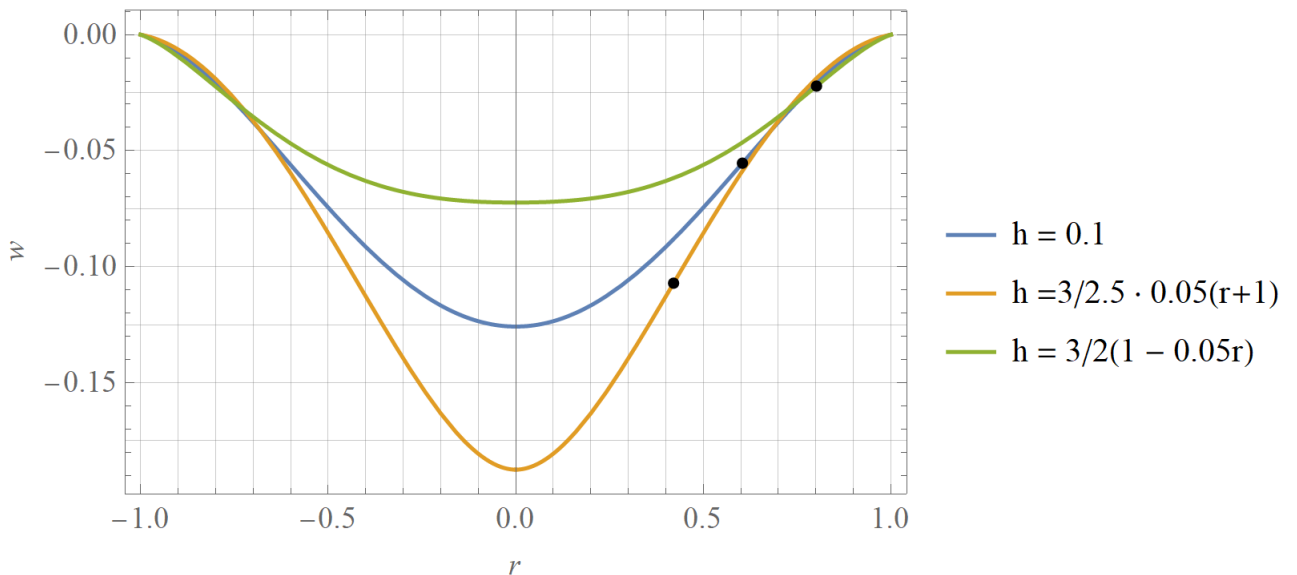


Рис. 4. Сравнение прогибов пластин с линейным законом изменения толщины.

Отмечены точки перегиба.

Из полученных результатов видно, что в случае, когда толщина пластины увеличивается от центра к краю (далее - пластина (а)) , прогиб имеет большую величину ближе к центру и меньшую ближе к краю по сравнению с пластиной постоянной толщины.

В обратном случае, когда толщина пластины уменьшается от центра к краю (далее - пластина(б)), величина прогиба в центре меньше, а по краям больше, в сравнении с пластиной постоянной толщины. Также можно заметить, что в обоих случаях у пластин есть точки, где величины прогиба совпадают с величиной прогиба пластины постоянной толщины.

Расположение точек перегиба также изменяется в зависимости от закона изменения толщины пластины.

Рассмотрим прогиб пластин с квадратичными законами изменения толщины $h = \frac{4}{3} \cdot 0.05(r^2 + 1)$ и $h = \frac{4}{3}(0.1 - 0.05r^2)$ и также сравним с прогибом пластины с постоянной толщиной $h = 0.1$



в)



г)

Рис. 5. Форма пластины в) $h = \frac{4}{3} \cdot 0.05(r^2 + 1)$, г) $h = \frac{4}{3}(0.1 - 0.05r^2)$

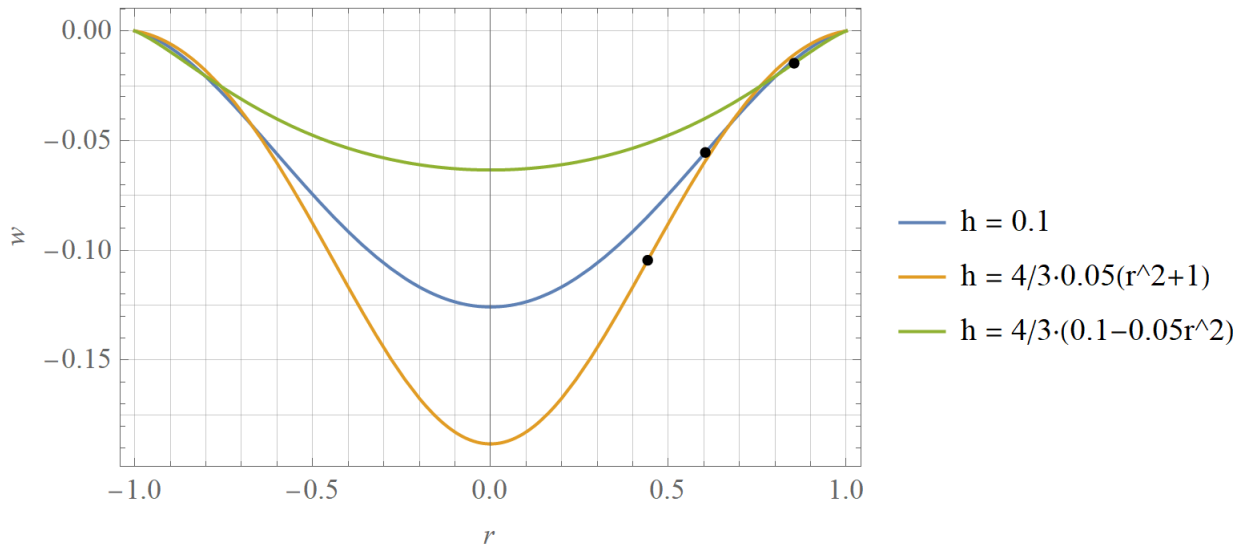


Рис. 6. Сравнение прогибов пластин с квадратичным законом изменения толщины.

Отмечены точки перегиба.

Здесь также видно, что в случае увеличения толщины пластины от центра к краю (пластина (в)), прогиб в центре несколько больше, чем у пластины постоянной толщины, а в случае уменьшения толщины от центра к краю (пластина (г)) прогиб, наоборот, меньше. Расположение точек перегиба также отличается.

Расчет с помощью COMSOL Multiphysics

Рассмотрим деформацию пластин в COMSOL Multiphysics.

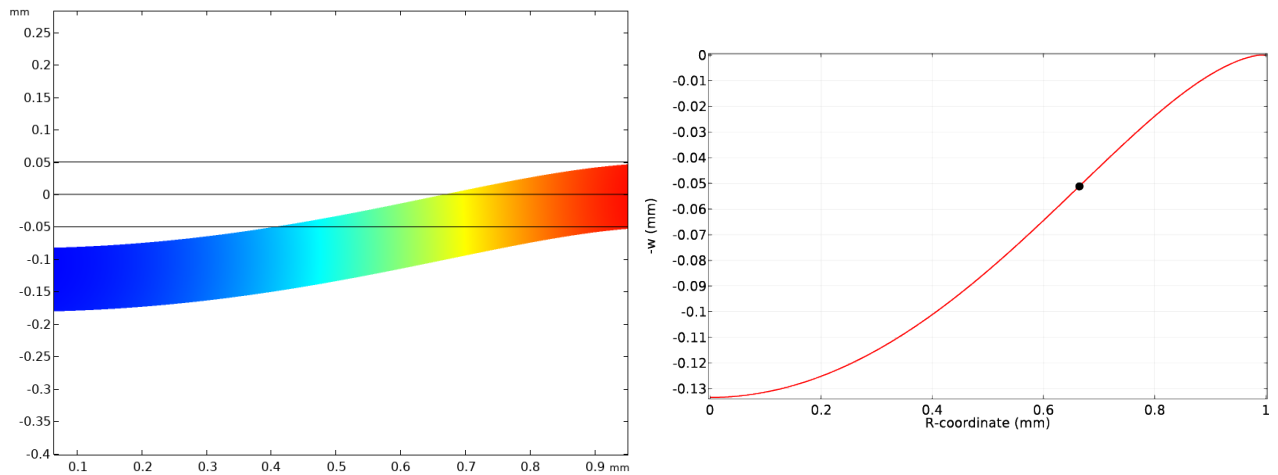


Рис. 7. Деформация пластины постоянной толщины $h=0.1$

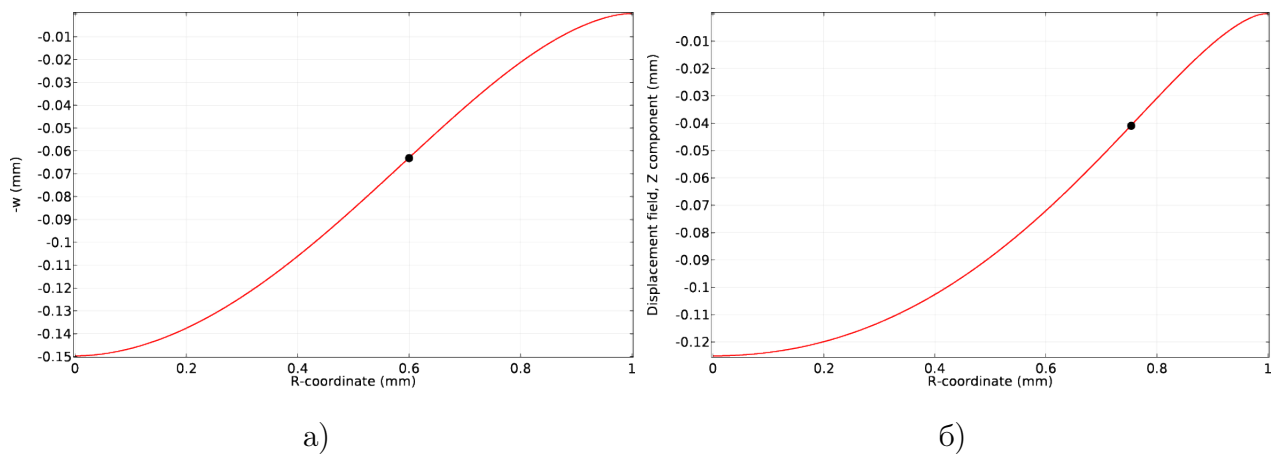


Рис. 8. Деформация пластин а) $h = 1.2 \cdot 0.05(r + 1)$, б) $h = 1.5(1 - 0.05r)$

В случае линейного закона изменения толщины, деформация пластины (а) в центре несколько больше в сравнении с пластиной $h = const$, а деформация пластины (б) - меньше.. Ближе к краю наоборот - деформация пластины (а) меньше, а пластины (б) больше. Расположение точки перегиба пластины в каждом случае различно.

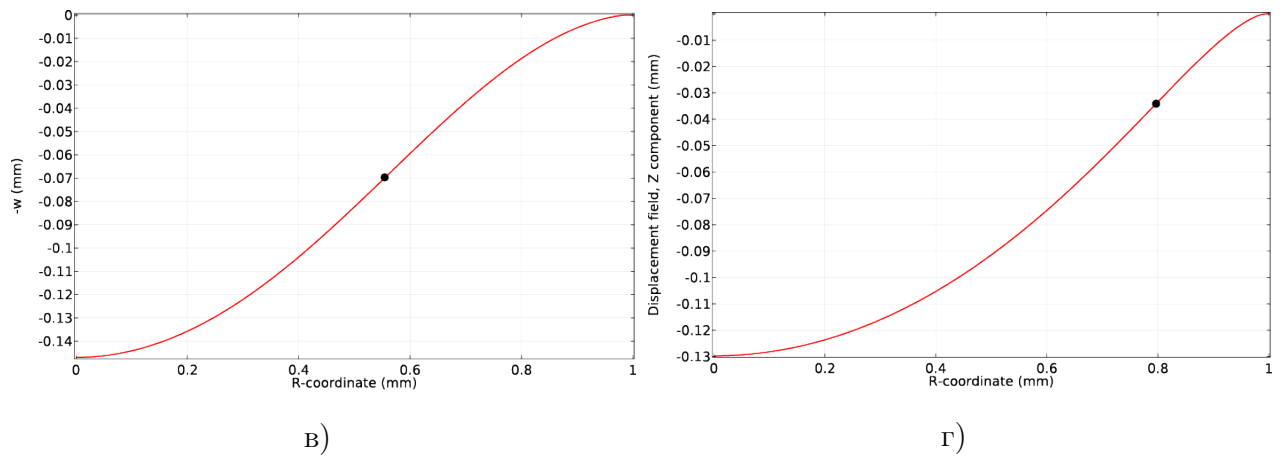


Рис. 9. Деформация пластин а) $h = \frac{4}{3} \cdot 0.05(r^2 + 1)$, б) $h = \frac{4}{3}(0.1 - 0.05r^2)$

В случае квадратичного закона изменения толщины значения прогибов в центре и ближе к краю также различны. Здесь можно также заметить, что в случае пластины (г), так же как и в (б) расположение точки перегиба пластины смещается ближе к краю по сравнению с расположением точки перегиба пластины постоянной толщины. А у пластин (а) и (в) наоборот - расположение точки перегиба смещается ближе к центру.

Заключение

Была построена математическая модель, помогающая определить деформацию неоднородной пластины. Результаты показали, что неоднородность пластины, в частности - неоднородность ее толщины, влияет на форму и величину ее прогиба. Это демонстрируют, как теоретические расчеты, так и расчеты с использованием метода конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics.

Особенно важно отметить, что различается также и положение точек перегиба при различных законах изменения толщины. При увеличении толщины пластины от края к центру точка перегиба смещается к внешнему краю пластины. Следовательно, решетчатая пластина с такой формой более подвержена глаукомному поражению.

Список литературы

1. Иомдина Е. Н. Бауэр С. М. Котляр К. Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. — Москва : Реальное Время, 2015.
2. Нестеров А. П. Егоров Е. А. Глаукоматозная атрофия зрительного нерва // Медицина. — 1981.
3. Киселева О. А. Иомдина Е. Н. Якубова Л. В. Хозиев Д. Д. Решетчатая пластинка склеры при глаукоме: биомеханические особенности и возможности их клинического контроля // Российский офтальмологический журнал. — 2018. — № 11 (3): 76-83.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость, колебания). — Москва : «Наука», 1967.